

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и
обслуживающих технологий

Кафедра высшей математики и методики преподавания математики

УТВЕРЖДАЮ

Директор института физико-
математического образования,
информационных и обслуживающих
технологий



 Горбенко Е.Е.
« 13 » декабря 2023 г.

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине
Математический анализ

По направлению подготовки – 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя
профилями подготовки)

Профиль подготовки – Физика. Математика

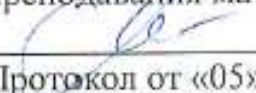
Квалификация выпускника – бакалавр

Форма обучения – очная

Курс – 1-3 курс (1-5 семестр)

Разработчик

Доцент кафедры ВМ и МПМ,
Клипаков Николай Викторович
Заведующий кафедрой
высшей математики и методики
преподавания математики

 Кривко Я.П.
Протокол от «05» декабря 2023 г., № 5

Луганск, 2023

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины Математический анализ и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины Математический анализ.

1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств.

Цель ФОС – установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО – бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 22 февраля 2018 г. №125 (с изменениями и дополнениями) и Профессиональным стандартом, утвержденным Приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации «Об утверждении профессионального стандарта "Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)"» от 18 октября 2013 г. № 544н.

1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций и индикаторов их достижения:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Профессиональные	
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК.1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета)
	ПК.1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО
	ПК.1.3. Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе

1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
1 семестр		
Тема 1. Введение. Элементы теории множеств и функций.	ПК–1	Выполнение практических заданий, индивидуального задания, контрольная работа
Тема 2. Предел и непрерывность функции одной переменной	ПК–1	Выполнение практических заданий, индивидуального задания, контрольная работа
Промежуточная аттестация	ПК–1	Экзамен (устный)
2 семестр		
Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной	ПК–1	Выполнение практических заданий, индивидуального задания, контрольная работа
Промежуточная аттестация	ПК–1	Зачет (устный)
3 семестр		
Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной	ПК–1	Выполнение практических заданий, индивидуального задания, контрольная работа
Тема 4. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	ПК–1	Выполнение практических заданий, индивидуального задания, контрольная работа
Промежуточная аттестация	ПК–1	Экзамен (устный)
4 семестр		
Тема 5. Интегральное исчисление функции одной переменной	ПК–1	Выполнение практических заданий, индивидуального задания, контрольная работа
Тема 6. Кратные и криволинейные интегралы	ПК–1	Выполнение практических заданий, индивидуального задания, контрольная работа
Промежуточная аттестация	ПК–1	Экзамен (устный)
5 семестр		
Тема 6. Кратные и криволинейные интегралы	ПК–1	Выполнение практических заданий, индивидуального задания, контрольная работа
Тема 7. Числовые, степенные и функциональные ряды	ПК–1	Коллоквиум, индивидуального задания, контрольная работа
Тема 8. Дифференциальные уравнения	ПК–1	Итоговый тест, выполнение индивидуального задания
Промежуточная аттестация	ПК–1	Экзамен (устный)

1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели)
ПК–1	<p>знает:</p> <ul style="list-style-type: none"> – формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства; возможные сферы связи утверждений математического анализа и их приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; основные понятия математического анализа, представленные в школьном курсе «Алгебра и начала анализа»;; основные психолого-педагогические и теоретико-методологические основы формирования универсальных учебных действий на уроках математики; современную методологию педагогического проектирования; теорию и технологию обучения и воспитания обучающихся в рамках предмета «математический анализ»; сущность понятия «образовательная программа»; комплекс действующих нормативов, определяющих стратегию, цели и содержание соответствующего уровня и типа образования <p>умеет:</p> <ul style="list-style-type: none"> – доказывать утверждения математического анализа; решать задачи математического анализа; применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; самостоятельно пользоваться справочными пособиями при решении прикладных задач; применять специальные научные знания для проектирования педагогической деятельности на основе результатов исследований в соответствии с нормативными документами в сфере образования; <p>владеет навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> – применения математического аппарата в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; использования технологий проектирования педагогической деятельности на основе специальных научных знаний и результатов исследований; современными психолого-педагогическими технологиями.

1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Очная форма обучения

Вид текущей учебной работы	Количество баллов
1 семестр	
работа на практических занятиях (5х5)	25
выполнение контрольной работы	5
выполнение индивидуального задания	30

экзамен	40
Итого за 1 семестр:	100
2 семестр	
оформление конспектов лекционных и практических занятий	5
работа на практических занятиях (5х5)	25
выполнение контрольной работы	5
выполнение индивидуального задания	40
зачет	25
Итого за 2 семестр:	100
3 семестр	
работа на практических занятиях (9х5х0,6)	27
выполнение контрольной работы	5
выполнение индивидуального задания	28
экзамен	40
Итого за 3 семестр:	100
4 семестр	
работа на практических занятиях (16х5х0,4)	32
выполнение контрольной работы (5х2)	10
выполнение индивидуального задания	28
экзамен	30
Итого за 4 семестр:	100
5 семестр	
работа на практических занятиях (19х5х0,4)	38
выполнение контрольной работы (5х2)	10
выполнение индивидуального задания	22
экзамен	30
Итого за 5 семестр:	100

Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбал- льная система оценивания экзамена	100- балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100- балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	83–89	В – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства	

		из них оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	75–82	С – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	63–74	D – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	50–62	E – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	Не зачтено
Неудовлетворительно	21–49	FX – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	
Неудовлетворительно	0–20	F – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

2.1. Оценочные средства текущего контроля (типовые)

Индивидуальное задание 1

1. Найти область определения заданной функции:

$$y = \arcsin \frac{2-x}{x-4} + x \cdot 2^{\frac{x^2}{x+1}}$$

2. Выяснить четность или нечетность заданной функции:

$$y = \frac{\lg(2-x^2)}{\sqrt[3]{\cos 2x}} + e^{-x^2}$$

3. Вычислить пределы функции:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 3x - 9}{3x^2 + 5x - 12}$ при 1) $x_0 = 2$; 2) $x_0 = -3$; 3) $x_0 = \infty$;

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}$

4. Вычислить пределы функции, используя первый и второй замечательный предел:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 3}{4x^2 + 1} \right)^{1-2x^2}$

5. Исследовать функцию на непрерывность, найти асимптоты и построить

схематично график: $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$

6. Найти точки разрыва и определить характер точек разрыва:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3}$$

7. Вычислить пределы функций с помощью эквивалентных бесконечно

малых: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$

8. Вычислить производные:

а)	б)	в)	г)
$y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$	$y = (e^{\sin x} + 3x)^3$	$y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x}$	$y = (x + 1)^{\sin x}$

9. Вычислить производные неявной и параметрически заданной функций:

a)	б)
$x^2 + y^2 - 2y = 0$	$\begin{cases} x = t - \ln t \\ y = 3t^2 - 2t^3 \end{cases}$

10. Вычислить предел, используя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

11. Исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики:

a)	б)
$y = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$	$y = \frac{2}{1 + x^2}$

Контрольная работа 1 «Функция»

Вариант 1

1. Найти область определения Функции

$$y = \frac{x}{\sqrt[4]{25 - x^2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - x^2} \cdot \ln(x + 1)}{(x^2 + 1)\sqrt{5^x}} - \frac{\sqrt[4]{x - 1}}{x}$$

2. Выяснить четность или нечетность функции

$$y = \frac{\sin x}{x^3}$$

$$y = 3^{4x} \cdot x^2 + \cos x$$

Найти область значений функции

$$y = \frac{2\sqrt{2x - 1}}{x^2 + 1}$$

Построить график функции:

$$y = -3x^2 + 10x - 3$$

$$y = |-4x - 3|$$

Контрольная работа 2
«Пределы. Непрерывность функции»

1. Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^7}{(3x-2)^5(x^2-1)}$, б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{2x-7}$,
в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - 4x}\right)$.

2. Исследовать на непрерывность функцию и классифицировать точки разрыва:

$$y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq -1; \\ x^2, & \text{если } -1 < x \leq 2; \\ 4, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Контрольная работа 3
«Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

1. Найти производные функций: а) $y = 3x^4 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt[5]{x^3}$;

б) $y = \sin^3(2x) \cdot \cos(5x^3)$

2. Составить уравнение касательной к кривой $y = \frac{8}{4+x^2}$ в точке $x_0 = 2$.

3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1 + \ln x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x} + 1}{4e^{5x} - x}$.

4. Найти интервалы монотонности функции: $y = x^3 - 3x^2 - 36x + 1$.

5. Материальная точка движется по прямой по закону $s = 6t^2 - t^3$. Найти максимальную скорость движения?

6. Провести полное исследование функции и построить график $y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$

1. Найти область определения заданной функции:

$$y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2x^2 - 3x - 5} + 4\sqrt{\frac{1-4x}{x^2 + x - 6}}$$

Индивидуальное задание 2

1. Найти область определения функции:

а)	б)
$z = \frac{\sqrt{6x+5y-30}}{2x^2-y}$	$z = \ln(x+2) + \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$

2. Найти все частные производные первого порядка от данных функций.

1. $u = 4 \ln(3+x^2) - 8xyz$ 2. $u = x\sqrt{y} + (y+z)\sqrt{x}$

3. Вычислить значение производной сложной функции при данном значении параметра.

$$u = e^{x-2y} \quad \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ y = t^3 \end{array} \right| \quad t_0 = 0$$

4. Найти частные производные неявно заданной функции

1. $z^3 + y^3 - 3yz - x = 0$ 2. $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$

5. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к заданной поверхности в точке M_0

Уравнение поверхности S	Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$
$x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 5 = 0$	$M_0(2, 2, -1)$

6. Найти производную функции в точке по направлению вектора \overline{AB} :

$$z = \arcsin \frac{x}{x+y}, \quad A(1; 1), \quad B(3; 4).$$

Контрольная работа № 4 «Функции нескольких переменных»

1	Найти область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$
2	Найти частные производные и частные дифференциалы следующих функций $z = \arcsin \frac{x}{y}$
3	Найти градиент функции $z = 7 - x^2 - y^2$ и его модуль в точке $M(1, 2)$
4	Исследовать на экстремум следующую функцию $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$

5	<p>Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = u(x, y)$ в треугольнике ABC.</p> <p>$u(x, y) = 13x^2 + 6xy + y^2 + 58x + 14y + 3$, $A(-4, -4)$, $B(4, 4)$, $C(-1, 1)$.</p>
---	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Индивидуальное задание 3

1. Вычислить неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$

2. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^6 + 7}} dx$

3. $\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx$

5. $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 2x + 5} dx$

6. $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx$

7. $\int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx$

8. $\int \frac{1}{x^2(x-1)^2} dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} dx$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

12. $\int \frac{1}{5 + 3\cos x} dx$

2. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$ 2) $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

3. : Найти площадь фигуры, ограниченной графиками:

$$y = x^2 - x - 2,$$

$$3y + 2x = 8, \quad y = x + 1$$

4. Найти длину дуги кривой. Сделать чертеж.

$$y = \sqrt{x^3}, 0 \leq x \leq 4$$

5. Объем тела (V), полученного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

$$V : y^2 = (x + 4)^3, x = 0$$

вокруг оси Oy

6. Вычислить несобственный интеграл или установить расходимость

1 $\int_0^{+\infty} \cos(\pi - 3x) dx$

2 $\int_0^{\infty} e^{-4x} dx$

Контрольная работа № 5 «Неопределенный интеграл»

Найти неопределенные интегралы

1	$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$
2	$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$
3	$\int x^2 \cos x dx$
4	$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$
5	$\int \frac{x^4}{(x^2+4)(x^2+3x+2)} dx$

Контрольная работа № 6 «Определенный интеграл»

1. Вычислить определенные интегралы

$$a) \int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}}; \quad б) \int_2^6 \sqrt{x-1} dx; \quad в) \int_0^{1/2} \frac{\arctg 2x}{1+4x^2} dx; \quad г) \int_3^5 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-2}}; \quad д) \int_{\pi}^{2\pi} x^2 \cos x dx.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = x^2 - 2x + 3, \quad y = 4 - 2x$$

3. Найти объем тела вращения вокруг оси Ох: $y = x^2$, $x + y - 6 = 0$.

Индивидуальное задание № 4

1. Изобразить область интегрирования и изменить порядок интегрирования в двойных интегралах от функций.

$$\int_0^{\pi/2} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$$

2. Вычислить двойной интеграл по областям D, ограниченным указанными линиями (в декартовой системе координат). Сделать чертеж

$$\iint_D (x+y) dx dy; \quad y = 0, \quad x = 0, \quad y + x = 2$$

3. Вычислить двойной интеграл по областям D , ограниченным указанными линиями (в полярной системе координат). Сделать чертеж

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

D – полукруг $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$

4. Вычислить тройные интегралы по фигурам V , ограниченным заданными поверхностями. Сделать чертеж

$$\iiint_V z dx dy dz; \quad V: \{x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x = 0, y = 0\}$$

Индивидуальное задание № 5

1. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаками сравнения

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 5^n} \qquad 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^3 + 1}$$

2. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаком Даламбера.

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!} \qquad 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

3. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь признаком Коши.

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2} \qquad 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{4^n}$$

4. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком.

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} \qquad 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n+1}}$$

5. Исследовать ряд на сходимость.

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{3})^n} \qquad 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n + n}$$

6. Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость.

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)} \qquad 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2n}$$

7. Найти область сходимости функционального ряда.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{3n}}{(n+1)5^n} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$$

8. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 .
Указать область сходимости.

$$f(x) = 2^x, \quad x_0 = 0.$$

9. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$

10. Решить уравнения, установив их тип:
 $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

11. Решить задачу Коши: $y' \sin x - y \cos x = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

12. Найти общее решение уравнения второго порядка
 $xy'' = \sqrt{1 + (y')^2}$

13. Найти частное решение линейного однородного второго порядка с постоянными коэффициентами: $y'' + 2y' + 5y = 0; y(0) = 1$
; $y'(0) = 3$.

14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = x - 5y & x(0) = 4 \\ y' = 2x - y & y(0) = -2 \end{cases}$$

Контрольная работа №7 «Дифференциальные уравнения»

1. Укажите ДУ с разделяющимися переменными

а) $(x + y)dx + \cos y dy = 0$; б) $\sin y dy = (x^2 + x^2 y^2)dx$;
в) $\operatorname{tg} y dy = (x^2 + xy)dx$; г) $y' - y = x^3$.

2. Укажите дифференциальное уравнение третьего порядка

а) $y'' - y' = 3$; б) $y''' + x = 0$; в) $y \cdot y' + 3x = 0$; г) $y' + \frac{y}{x} = y^3$.

3. Укажите линейное ДУ первого порядка.

а) $y' = ye^x$; б) $y' = \frac{x-y}{3x+5y}$; в) $y' = y \cdot x^2 + e^x$; г) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{e^y + 5}$.

4. Дифференциальное уравнение $y'(x^2 + 9) = y^3 - 1$ является

- а) дифференциальным уравнением второго порядка;
 б) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;
 в) линейным дифференциальным уравнением;
 г) однородным дифференциальным уравнением.

5. ДУ вида $2(y')^2 = (y-1)y''$ решается с помощью замены

а) $y' = p(x)$, $y'' = \frac{dp}{dx}$; б) $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$;

в) $y = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u'v + uv'$; г) $y = x \cdot u$, $y' = u + xu'$.

6. Запишите характеристическое уравнение ДУ $y'' + 5y = 2x$.

7. Общий интеграл ДУ $\frac{dy}{y+5} = \cos 3x dx$ имеет вид

а) $\ln|y+5| = \frac{1}{3} \sin 3x + c$; б) $\frac{1}{5} \ln|y+5| = \frac{1}{3} \sin 3x + c$;

в) $\ln|y+5| = \sin 3x + c$; г) $\ln|y+5| = \frac{1}{3} \sin 3x$.

8. Проинтегрировать дифференциальное уравнение с разделяющимися

переменными. Решить задачу Коши: $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$

9. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Контрольная работа 8

«Ряды»

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{n} + \sqrt{n}}$

2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$.

3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n$.

5. Разложить функцию в ряд Маклорена, используя стандартные разложения функций в ряд Маклорена, указать область сходимости $\cos 2x$;

Вопросы к коллоквиуму «Ряды»

1. Числовые ряды, необходимое условие сходимости, критерий Коши
2. Абсолютная сходимость, признаки сравнения сходимости неотрицательных числовых рядов
3. Признак сходимости про 2^n . Расходимость гармонического ряда
4. Признаки Даламбера и Коши.
5. Интегральный признак сходимости ряда
6. Перестановка слагаемых абсолютно сходящегося ряда
7. Условно сходящиеся ряды, теорема Римана о перестановках условно сходящегося ряда, признак Лейбница
8. Тождество Абеля, признаки Абеля и Дирихле
9. Произведение рядов
10. Равномерная сходимость, критерий Коши равномерной сходимости ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости
11. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости
12. Степенной ряд, круг сходимости, сходимость в крайних точках и область равномерной сходимости
13. Почленное дифференцирование степенных рядов
14. Суммирование расходящихся рядов, определения, свойства.

2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

Вопросы к экзамену (1 семестр)

1. Понятие множества и подмножества.
2. Пустое множество. Операции над множествами.
3. Взаимно однозначное соответствие множеств.
4. Эквивалентные множества, счетные и несчетные множества.
5. Числовые множества.
6. Ограниченные (сверху, снизу) и неограниченные (сверху, снизу) множества.
7. Наибольший (наименьший) элемент множества.
8. Понятие функций
9. Способы задания функции.
10. Элементарные функции.
11. Элементарное исследование функций.
12. Числовые последовательности.
13. Предел числовой последовательности.
14. Признаки существования предела последовательности.
15. Число e .
16. Предел функции одной переменной.
17. Односторонние пределы.
18. Бесконечно малые (бесконечно большие) величины и их связь с

пределами функций.

19. Первый замечательный предел
20. Второй замечательный предел.
21. Непрерывность функции в точке и на множестве.
22. Точки разрыва и их классификация.
23. Непрерывность основных элементарных функций.
24. Верхняя (нижняя) грань, глобальный максимум (минимум) функции в ее области определения.

Вопросы к зачету (2 семестр)

1. Понятие производной функции одной переменной.
2. Понятие дифференцируемой функции.
3. Связь непрерывности и дифференцируемости функции одной переменной.
4. Производные основных элементарных функций.
5. Основные правила дифференцирования
6. Геометрический смысл производной.
7. Механический смысл производной.
8. Производная сложной функции.
9. Производная обратной функции.
10. Производная параметрически заданной функции.
11. Понятие дифференциала функции одной переменной.
12. Свойства дифференциала.
13. Инвариантность формы первого дифференциала.
14. Геометрический смысл дифференциала.
15. Вычисление приближенных значений функций с помощью дифференциала.

Вопросы к экзамену (3 семестр)

1. Основные теоремы дифференциального исчисления.
2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.
3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано. Единственность разложения Тейлора.
4. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ (по формуле Маклорена). Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора.
5. Критерии постоянства и монотонности функции на интервале.
6. Понятие об экстремумах функции одной переменной. Локальные экстремумы функции. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.
7. Понятие убывающей и невозрастающей функции, возрастающей и неубывающей функции. Достаточное условие строгой монотонности

8. Понятие стационарных и критических точек. Необходимый признак экстремума дифференцируемой функции (теорема Ферма).
9. Первый и второй достаточный признаки экстремума.
10. Понятие наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
11. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. Достаточное условие выпуклости и вогнутости графика функции.
12. Понятие точки перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба
13. Асимптоты графика функции одной переменной.
14. Исследование функции одной переменной с использованием первой и второй производных и построение ее графика.
15. Функции многих переменных.
16. Точечные множества в n -мерном пространстве. Окрестность точки. Граница множества. Открытые, замкнутые множества.
17. Определение функции многих переменных. Способы задания.
18. Геометрическая интерпретация функции двух переменных. Поверхности второго порядка.
19. Предел функции многих переменных.
20. Непрерывность. Свойства непрерывных функций.
21. Частные приращения и частные производные функции многих переменных.
22. Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных.
23. Полное приращение функции многих переменных. Дифференцируемость.
24. Дифференциал, его связь с частными производными.
25. Частные дифференциалы. Линеаризация функции.
26. Дифференцирование сложной функции многих переменных. Полная производная.
27. Инвариантность формы первого дифференциала.
28. неявная функция. Теорема существования неявной функции.
29. Дифференцирование неявной функции.
30. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве старших смешанных производных.
31. Формула Тейлора для функции многих переменных. Операторная запись формулы Тейлора.
32. Экстремумы функции многих переменных. Локальные экстремумы.
33. Необходимые условия экстремума.
34. Достаточные условия экстремума.
35. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции нескольких переменных в замкнутой области.
36. Условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа.
37. Скалярное поле. Линии и поверхности уровня.

38. Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его свойства.
39. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
40. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.

Вопросы к экзамену (4 семестр)

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Теорема об общем виде неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла.
2. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование.
3. Интегрирование методом замены переменного (методом подстановки) в неопределенном интеграле.
4. Интегрирование по частям.
5. Интегрирование по частям. Возвратные интегралы:

$$\int e^{ax} \sin(kx + b) dx, \int e^{ax} \cos(kx + b) dx, \int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx$$
6. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.
7. Простейшие рациональные дроби многочленов и их интегрирование.
 а.
$$\int \frac{A}{x-a} dx, \int \frac{A}{(x-a)^s} dx, \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx, \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s} dx$$
8. Разложение рациональной дроби на простейшие.
9. Интегрирование рациональных дробей многочленов. Метод неопределенных коэффициентов.
10. Интегрирование функций, содержащих иррациональные выражения.
11. Вычисление интегралов от тригонометрических функций
12. Универсальная тригонометрическая подстановка и ее применение.
13. Определенный интеграл. Основные определения. Геометрический смысл определенного интеграла
14. Свойства и оценки определенного интеграла
15. Теоремы об определенном интеграле.
16. Формула Ньютона–Лейбница. Вычисление определенных интегралов
17. Метод замены переменной в определенном интеграле
18. Метод интегрирования «по частям»
19. Определенные интегралы от четных и нечетных функций по симметричному промежутку интегрирования
20. Общая схема, по которой проводится вычисление любой величины с помощью определенного интеграла
21. Приложение определенного интеграла. Площадь плоской фигуры в прямоугольной и полярной системах координат
22. Приложение определенного интеграла. Объемы тел вращения
23. Приложение определенного интеграла. Длина дуги плоской кривой в прямоугольной и полярной системе координат.

24. Приложение определенного интеграла. Площадь поверхности вращения
25. Приложение определенных интегралов к решению физических задач
26. Приближенное вычисление определенных интегралов
27. Несобственные интегралы I рода
28. Несобственные интегралы II рода.
29. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла. Необходимое и достаточные условия существования двойного интеграла.
30. Двойной интеграл. Его определение, свойства
31. Геометрический смысл двойного интеграла.
32. Вычисление двойных интегралов в декартовой и полярной системах координат.
33. Приложения двойного интеграла (объем тела, площадь, статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции плоской фигуры).
34. Тройной интеграл. Его определение, свойства
35. Геометрический смысл тройного интеграла.
36. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах.
37. Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.
38. Приложения тройного интеграла (объем тела, масса, статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции тела).

Вопросы к экзамену (5 семестр)

1. Криволинейные интегралы I рода. Его определения и свойства.
2. Криволинейные интегралы II рода. Его определения и свойства.
3. Формула Остроградского-Грина. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования.
4. Приложения криволинейных интегралов I и II родов.
5. Поверхностный интеграл I рода. Его определение, свойства.
6. Приложения поверхностного интеграла I рода (площадь, масса, моменты и центр тяжести поверхности).
7. Поверхностный интеграл II рода. Его определение, свойства.
8. Векторное и скалярное поле. Векторные линии и поток поля.
9. Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского-Гаусса.
10. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Формула Стокса.
11. Числовые ряды. Сумма ряда. Общий член ряда. Сходимость ряда.
12. Основные свойства сходящихся рядов. Остаток ряда.
13. Необходимый признак сходимости числового ряда.
14. Знакоположительные ряды. Критерий сходимости рядов с положительными членами.
15. Признаки сравнения рядов. Признак сравнения в предельной форме.
16. Признак Даламбера. Радикальный признак сходимости Коши.
17. Интегральный признак сходимости. Примеры.

18. Знакопеременные ряды. Теорема о сходимости знакопеременного ряда.
19. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.
20. Абсолютная и условная сходимости. Свойства абсолютно сходящихся числовых рядов.
21. Функциональные ряды. Область и точка сходимости функционального ряда.
22. Признак равномерной сходимости Вейерштрасса.
23. Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда. Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда.
24. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
25. Равномерная сходимость степенного ряда на любом отрезке из интервала сходимости. Свойства степенных рядов: непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование.
26. Ряды Тейлора и Маклорена. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора.
27. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд. Применение степенных рядов для приближенных вычислений.
28. Дифференциальные уравнения. Основные понятия.
29. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения.
30. Задача Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, начальные данные. Геометрическая интерпретация решения задачи Коши.
31. Формулировка достаточных условий существования и единственности решения задачи Коши.
32. Общее и частное решения дифференциального уравнения. Примеры.
33. Уравнения с разделенными переменными. Уравнения с разделяющимися переменными.
34. Однородные дифференциальные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным.
35. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Однородные и неоднородные уравнения.
36. Решение линейных дифференциальных уравнений методом вариации постоянной (метод Лагранжа).
37. Решение линейных дифференциальных уравнений методом подстановки $y = u \cdot v$. Уравнение Бернулли.
38. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
39. Дифференциальные уравнения высших порядков. Уравнения, допускающие понижение порядка.
40. Линейные однородные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
41. Линейные неоднородные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Отыскание общего решения методом вариации произвольных постоянных.

42. Решение уравнения $y'' + py' + qy = e^{ax} \cdot P_m(x)$ методом неопределенных коэффициентов.
43. Решение уравнения $y'' + py' + qy = e^{ax} \cdot [A_m(x) \cdot \cos bx + B_n(x) \cdot \sin bx]$ методом неопределенных коэффициентов.
44. Общие понятия о системах дифференциальных уравнений.
45. Теорема Коши существования и единственности решения для систем дифференциальных уравнений.
46. Метод исключения неизвестных для нормальных систем.
47. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
48. Понятие фундаментальной системы решений. Определитель Вронского.
49. Характеристическое уравнение. Схема решения систем однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Вопросы и задания для диагностической работы «Математический анализ»

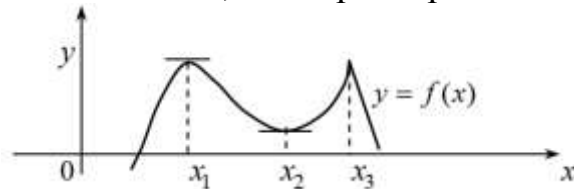
- 1 Перечислите числовые множества.
- 2 Запишите общий вид комплексного числа
- 3 К основным элементарным функциям относятся _____.
- 4 Какие способы задания функции Вы знаете?
- 5 Функция $y = f(x)$ называется _____, если для любых значений x из области определения $f(-x) = f(x)$
- 6 Дана функция $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x - 3}$. Найти область определения функции
- 7 Дана функция $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x - 3}$. Найти значение функции в точке $x_0 = 1$
- 8 Дана функция $y = \frac{\sqrt{2x + 1}}{x}$. Найти область определения функции;
б) значение функции в точке $x_0 = 0,5$.
- 9 Дана функция $y = \frac{\sqrt{2x + 1}}{x}$. Найти значение функции в точке $x_0 = 0,5$.
- 10 Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 3x - 10}$
- 11 Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - x^2 + 1}{x^2 + 3x^3 + 2x^5}$
- 12 Запишите первый замечательный предел.
- 13 Как связаны бесконечно малые и бесконечно большие функции?

- 14 Какой функции эквивалентна функция $\sin^2 3x$?
- 15 Как называется разность $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ на отрезке $[x_1; x_2]$?
- 16 Дайте определение производной функции.
- 17 В чем заключается геометрический смысл производной?

18 Найти производную функции $y = -\frac{2}{9}x^{18} + \frac{2}{3}x^3$.

19 Найти производную функции: $y = \sin(x^2 + 2x + 1)$

20 Указать точки, в которых производная функции не существует



- 21 Найти точки, в которых функция имеет экстремум $y = x^3 - 12x$
- 22 Если первая производная функции больше нуля на некотором интервале, то функция _____.

23 Определить интервалы монотонности функции $y = 2x^2 - 8x$

24 Скорость движения тела выражена формулой $v = 2t + 3t^2$. Найти путь, который пройдет тело за $t = 5$ секунд от начала движения.

25 Что такое точка перегиба?

26 Как связаны интервалы выпуклости и вогнутости функции со второй производной функции?

27 Какие виды асимптот Вы знаете?

28 Применяя правило Лопиталя, вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2 + 5x}$.

29 Как называется совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X ?

30 Найдите первообразную функции $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$

31 Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int (x+1)^5 dx$.

32
$$\int x^n \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix} dx$$

Данный класс интегралов решается методом_____.

33 В общем случае интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ вычисляются при помощи _____ подстановки.

34

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 + 25}$.

35

Указать замену, при решении данного интеграла $\int \sqrt{2x+1} dx$.

36

В соответствии с геометрическим смыслом, определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ численно равен _____, ограниченной линиями $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$.

37

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, которая называется формулой _____.

38

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3x^2 - 2x$, $x = 0$, $x = 2$

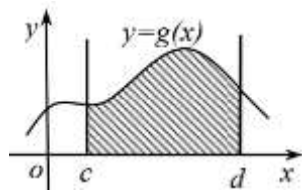
39

Найти определенный интеграл $\int_1^2 (x^3 + 2x) dx$.

40

Найти определенный интеграл $\int_0^\pi \cos 2x dx$.

41



Запишите формулу, по котором можно вычислить объем тела вращения вокруг оси Ox .

42

Запишите формулу вычисления длины дуги с помощью определенного интеграла.

43

Дана функция $z = \ln(x^2 + y)$ Найдите частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$.

44

Найти значение второй частной производной по x для функции $z = x^3 + y^2x$ в точке $M(1, -2)$.

45

Найти дифференциал первого порядка $z = 2xy - \cos xy$

46

Дана функция $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$. Найдите частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

47

Если $z = f(x, y)$, f''_{xy} , f''_{yx} , определены в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ и непрерывны в этой точке, то справедливо ли утверждение $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$?

48

Найдите значение частной производной функции $z = x^3 - xy - y^3$ по переменной x в точке $M_0(2, 1)$.

- 49 Если для функции $z = f(x, y)$ в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ выполняются условия $f'(x) = f'(y) = 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является _____.
- 50 Если $z = f(x, y)$ – непрерывная функция, то предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ называется _____.
- 51 Определенный интеграл с бесконечными пределами интегрирования называется _____.
- 52 Определенный интеграл с неограниченной подынтегральной функцией называется _____.
- 53 Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
- 54 Предел последовательности интегральных сумм I_n при условии, что $\max |\Delta \vec{l}_k| \rightarrow 0$, называется _____ по координатам (второго рода) и обозначается $\int_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.
- 55 Основные приложения двойного интеграла.
- 56 Основные приложения тройного интеграла.
- 57 Приведите пример числового сходящегося ряда
- 58 Что называется n-частичной суммой числового ряда?
- 59 В чем отличия знакочередующегося и знакопеременного числовых рядов?
- 60 Является ли данное выражение $1, 2, 3, \dots, 408, \dots$ числовым рядом?
- 61 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если _____.
- 62 Какой дифференциальное уравнение называется обыкновенным?
- 63 Что определяет порядок дифференциального уравнения?
- 64 Как называется данный вид дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$?
- 65 Является ли функция $y = 5x^2$ решением дифференциального уравнения $xy' = 2y$.
- 66 Является ли приведенное дифференциальное уравнение линейным и однородным?
 $y' - xy = 0$
- 67 Запишите характеристическое уравнение для данного линейного однородного дифференциального уравнения II-го порядка с постоянными коэффициентами: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

- 68 Может ли данная функция $y = c_1x + c_2$ являться общим решением ДУ первого порядка?
- 69 Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?
- 70 Сформулируйте задачу Коши для дифференциальных уравнений.

. Образец оформления экзаменационного билета

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)**

ПО ДИСЦИПЛИНЕ: «Математический анализ»

для студентов 1 курса

**Институт физико-математического образования, информационных и
обслуживающих технологий**

**Кафедра высшей математики и методики преподавания математики
форма обучения очная**

**Код. Направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя
профилями)**

Профиль Физика. Математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Понятие множества и подмножества. Пустое множество. Операции над множествами.
2. Бесконечно малые (бесконечно большие) величины и их связь с пределами функций.
3. Найти область определения функции $y = \sqrt{\frac{1}{9-x^2}} + \arccos(\frac{x}{2} - 1)$
4. Исследовать функцию $y = 8^{\frac{1}{x-3}}$ на непрерывность

Утверждено на заседании кафедры ВМ и МПМ, протокол №___ от 20__ года.

Экзаменатор

Ю.Н. Калайдо

Заведующий кафедрой

Я.П. Кривко